XIX Российский Фестиваль юных математиков

Третий тур. Лига стратегий. Решения.

1. Ответ: только при $p = 5$ ($a_3 = -1$)). При $p = 2$ получаем, что a_k четно при $k \geqslant 2$. Пусть p — нечетное простое. Заметим, что $a_k \equiv 2^{k-1}$ по модулю p и $a_k \equiv k$ по модулю $p-1$. Так что если $a_k = -1$, то $k = (p-1)m - 1$ при некотором натуральном m. Но тогда имеем $-4 = 4a_k \equiv 2^{k+1} \equiv 2^{(p-1)m} \equiv 1$ по модулю p, откуда $p = 5$.

2. Докажем такой более общий факт: для данного дерева T на $n \geqslant 2$ вершинах в графе на $(n-1)(k-1)+1$ вершинах найдется либо независимое множество из k вершин, либо несколько ребер, образующих дерево, изоморфное T (в нашем случае $n = 15$, $k = 144$). Индукция по n. База $n = 2$ очевидна. Переход $n-1 \to n$. Удалим из нашего дерева T какую-нибудь висячую вершину, получим дерево T'. Предположим, что в графе нет независимого множества из k вершин. Тогда удалим несколько ребер так, чтобы появилось независимое множество M из $k-1$ вершины, но из k по-прежнему не было (так можно сделать: при удалении одного ребра размер максимального независимого множества увеличивается не более чем на 1). Достаточно найти дерево, изоморфное T, в новом графе G. Рассмотрим граф $G - M$ (выкинули вершины множества M). В нем по предположению индукции несколько ребер образуют дерево T'. Пусть $a \in G$ — вершина этого дерева, которая в T была соединена с удаленной висячей. Поскольку (a, M) не есть независимое множество, вершина a соединена с одной из вершин множества M, добавляя к имеющейся изоморфной копии T' это ребро получаем дерево, изоморфное T.

3. Ответ: выигрывает первый. Все получаемые числа будут четные, рассмотрим их половины. Это будут числа от 1 до 878, надо получить 878. Разрешенные операции — замена двух чисел на сумму или удвоенное произведение. Заметим, что первый первым ходом получит 2. Число 439 получать нельзя: сразу проиграешь. Разобьем все числа от 3 до 875 (кроме 439) на пары, дающие в сумме 878. Заметим, что нельзя получать два числа из одной пары, так что игроки по очереди закрывают пары. Других запретов нет: если $878 = 2xy$, то $x = 1$, $y = 439$ или наоборот. Докажем, что первый выигрывает. Всего имеется 436 пар. Пусть первый каждый раз закрывает наименьшее возможное число, еще не вошедшее в закрытую пару. Докажем, что у него всегда есть ход, тогда он выиграет по четности. Пусть наименьшее не вошедшее в закрытую пару число равно $k \leqslant 438$. Тогда пары с числами $3, 4, \ldots, k-1$ закрыты. Из них хотя бы $[(k-3)/2]$ закрыл первый, так что они закрыты меньшими числами пар. Поэтому в распоряжении первого имеется хотя бы $[(k-3)/2] + 2 = [(k+1)/2]$ числа (еще есть 1 и 2) от 1 до $k-1$. Сумма каких-то двух из них дает в сумме k.

4. Пусть CH_C и AH_A - перпендикуляры из вершин A и C на диагональ BD. Тогда треугольники $\triangle AH_AP$ и $\triangle CH_CP$ - подобны по 3 углам. А значит $\frac{AP}{CP} = \frac{AH_A}{CH_C} = \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}$. Учитывая что $\sin\angle BAD = \sin\angle BCD$ (Так как сами углы дополняют друг друга до $180°$), получаем что $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}$. Значит теперь осталось доказать: $\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD} = \frac{AI^2}{CI^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AI}\cdot\frac{AD}{AI} = \frac{CB}{CI}\cdot\frac{CD}{CI}$ Обозначим половинки углов четырехугольника: $\frac{\angle A}{2} = \alpha$ (Ну и аналогично определим β, γ и δ). Тогда по теореме синусов для $\triangle ABI$: $\frac{AB}{AI} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta)}$. Применяя аналогичные теоремы синусов получаем, что то что осталось доказать равносильно следующему: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\delta} = \frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta} \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\delta) = \sin(\gamma+\beta)\cdot\sin(\gamma+\delta)$ Сумма углов четырехугольника равна $360°$, а значит $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$, а значит приведенное выше равенство действительно верно ($\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\delta)$ и $\sin(\alpha+\delta) = \sin(\gamma+\beta)$).

5. Заметим, что десятичные записи рациональных чисел периодичны. Рассмотрим какое-нибудь рациональное число q и цифры в его десятичной записи, стоящие на местах с номерами $n!$ (при всех натуральных n). Заметим, что начиная с некоторого натурального N_q, все факториалы кратны периоду десятичной записи q, а значит все цифры стоящие на указанных местах, начиная с $N_q!$ одинаковы. Тогда покрасим q в цвет с номером той цифры, которая оказалась на этих местах. Очевидно тогда, что при такой покраске, если два числа a и b имеют одинаковый цвет, то их десятичные записи совпадают в бесконечном количестве разрядов. (они просто совпадают во всех разрядах с номерами $n!$, начиная с некоторого места)

6. Ответ: $n = 1, 2, 3, 6$. Заметим, что если $2n+1 = pq$ — составное число ($3 \leqslant p, q \leqslant (2n+1)/3 \leqslant n$), то $n!$ делится на p, а тогда и 8 делится на p, что невозможно. Пусть теперь $p = 2n+1$ — простое число. Тогда по теореме Вильсона $(-1)^n(n!)^2 \equiv (2n)! \equiv -1$ (первое сравнение следует из того, что $n+1 \equiv -n$, $n+2 \equiv -(n-1)$, $\ldots$, $2n \equiv -1$), так что $64 \equiv (n!)^2 \equiv (-1)^{n+1}$. Отсюда $p \in \{3, 7, 5, 13\}$. Все они подходят.

7. Ответ: 97. Пример: пусть три соседние вершины нашего стоугольника образуют правильный треугольник ABC, а остальные лежат на меньше дуге AC описанной около ABC окружности. Предположим теперь, что точка нашлись 4 нехорошие вершины, образующие выпуклый четырехугольник $ABCD$. Не умаляя общности, $\angle A + \angle B \leqslant \pi$ и $\angle A + \angle D \leqslant \pi$. Пусть M и N — вершины, соседние с C в стоугольнике (порядок такой, что $ABMCND$ — выпуклый шестиугольник, возможно вырожденный, если $M = B$ или $N = D$). Пусть точка K такова, что $BCDK$ — параллелограмм. Тогда K лежит в четырехугольнике $ABCD$. Заметим, что прямая, проходящая через M параллельно CD, пересекает отрезок KD в какой-то точке P. Тогда прямая, проходящая через M параллельно CN, пересекает ломаную PDN (стало быть и ломаную KDN). Аналогично и прямая, проходящая через N параллельно MC, пересекает ломаную KBM. Но тогда две указанные прямые должны пересекаться в шестиугольнике $KBMCND$, который содержится в стоугольнике. Значит, точка C хорошая — противоречие.

8. Определим новую функцию $g(x,y,z) = f(x,y,z) - x$. Тогда на g получим то же функциональное уравнение, только в правой части стоит 0, а не сумма подставляемых чисел. Положим $h(x,y) = g(x,y,0) + g(y,0,0)$. Докажем, что $g(x,y,z) = h(x,y) - h(y,z)$. Действительно, это равенство равносильно тому, же $g(x,y,z) + g(y,z,0) + g(z,0,0) = g(x,y,0) + g(y,0,0)$. Прибавим к обеим частям $g(0,0,x) + g(0,x,y)$. Справа получится 0 по условию для набора $(x,y,z,0,0)$, а слева — по условию для набора $(x,y,0,0,0)$ (так как $g(0,0,0) = 0$ из условия для набора из всех нулей). Равенство доказано. Очевидно, что функция $g(x,y,z) = h(x,y) - h(y,z)$ удовлетворяет требуемому уравнению (с правой частью, опять же, 0) для любого $n \geqslant 3$.

9. Для $n \leqslant 7$ годится многочлен $(x-1)^n \cdot x^{n^2-n}$. Пусть $n \geqslant 8$. Рассмотрим все многочлены вида $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n^2}x^{n^2}$, для которых $0 \leqslant a_i \leqslant n^2$. Таких многочленов имеется $N = (n^2+1)^{(n^2+1)}$. Каждому многочлену f сопоставим вектор длины n: $(f(1), f'(1), \ldots, f^{(n-1)}(1))$. Докажем, что какие-то два вектора совпадут — тогда разность $g(x)$ соответствующих многочленов кратна $(x-1)^n$, многочлен $g(x)\cdot x^{n^2-\deg g}$ удовлетворяет условию. Посмотрим, сколько может быть различных векторов. Легко видеть, что $0 \leqslant f^{(k)}(1) \leqslant n^2\cdot k!\sum\limits_{i=0}^{n^2} C_i^k = n^2k!\cdot C_{n^2+1}^{k+1} < (n^2+1)^{k+2}$. Так что различных возможных векторов не больше, чем $(n^2+1)^{2+3+\cdots+(n+1)}$. Но при $n \geqslant 8$ имеем $n^2+1 > 2+3+\cdots+(n+1)$, так что различных векторов меньше, чем различных многочленов и осталось воспользоваться принципом Дирихле.

10. Во-первых заметим, что можно считать, что P лежит внутри или на границе треугольника. В самом деле, если P лежит например по другую сторону от стороны AB, чем треугольник ABC, то P можно заменить на проекцию P на прямую AB: все расстояния PA, PB, PC уменьшатся. После этого либо P уже на стороне AB, либо, если, например P на продолжении луча BA за A, можно заменить P на A или проекцию C на прямую AB. Наконец, последнюю проекцию можно спроектировать на CA.

Теперь займемся решением задачи. Проведем касательные l_a, l_b, l_c к описанной окружности треугольника ABC в соответствующих вершинах. Обозначим $f_a(P)$, $f_b(P)$, $f_c(P)$ расстояния от точки P до прямых l_a, l_b, l_c. Очевидно, $PA \geqslant l_a(P)$ и т.д. Так что достаточно доказать, что $l_a(P)/a^2 + l_b(P)/b^2 + l_c(P)/c^2 \geqslant 1/R$ (как обычно, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$). Заметим, что левая часть последнего неравенства есть линейная функция точки P, так что достаточно проверить неравенство в вершинах треугольника. Если например $P = A$, то имеем $l_b(A)/b^2 + l_c(C)/c^2 = c\sin\gamma/b^2 + b\sin\beta/c^2 = \frac{1}{2R}(\sin^2\gamma/\sin^2\beta + \sin^2\beta/\sin^2\gamma) \geqslant 1/R$, что и требовалось.

Третий тур. Лига тактик. Решения.

1. Оценим каждое слагаемое левой части отдельно, следующим образом: $\frac{1}{x^2+yz} \leqslant \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xz}$Просуммировав все 3 таких неравенства получим требуемое.

2. см. решение задачи 4 из лиги стратегий.

3. Очевидно, что $\angle EDP = \angle BDA = \angle ADC = \angle PDF$. Значит DP - биссектриса угла $\angle EDF$. Также равны треугольники $\triangle EBD$ и $\triangle FCD$ по катету и острому углу. Поэтому $ED = DF$, значит $\triangle EDF$ - равнобедренный, а значит DP в нем - срединный перпендикуляр к EF.

4. Да существует. Рассмотрим, например, последовательность $a_n = n!^3$. Очевидно, что при $a = 0$ в $a_n + a$ нет простых чисел. При $|a| > 1$, для всех $n \geqslant |a|$ верно, что $a_n + a \ \vdots\ |a|$ и при этом $a_n + a > |a|$, поэтому число $a_n + a$ - составное, значит в $\{a_n + a\}$ лишь конечное число простых чисел. Если же $a = \pm 1$, то $a_n + a = n!^3 \pm 1 = (n! \pm 1)(n!^2 \mp n! + 1)$ - очевидно, не является простым при $n \geqslant 3$. Значит в таких последовательностях максимум два простых числа.

5. Пусть V - объем тетраэдра $OABC$, и пусть длины ребер OA, OB и OC это a, b и c соответственно. Тогда $3V = r(S_{ABC} + S_{AOC} + S_{OBC} + S_{ABO})$ и $3V = OH \cdot S_{ABC}$. Поэтому $OH = r(1 + \frac{S_{AOC}+S_{OBC}+S_{ABO}}{S_{ABC}})$. Осталось доказать, что $\frac{S_{AOC}+S_{OBC}+S_{ABO}}{S_{ABC}} \leqslant \sqrt{3}$. Заметим, что $S_{AOC} = \frac{ac}{2}, S_{OBC} = \frac{bc}{2}, S_{ABO} = \frac{ab}{2}$. При этом $AB = \sqrt{a^2+b^2}$ по теореме Пифагора. Также если опустить перпендикуляры из точек C и O на прямую AB, то по теореме о трех перпендикулярах они попадут в одну точку, обозначим ее D. Тогда $OD \cdot AB = 2S_{OAB} = OA \cdot OB$, значит $OD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит $S_{ABC} = \frac{1}{2}CD \cdot AB = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}$. Осталось проверить, что $ab+bc+ac \leqslant \sqrt{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$. Но это следует из неравенства о средних для трех чисел.

6. Если $b \geqslant 1$, то правая часть сравнима по модулю 3 с 1, а левая либо с 2 либо с 3. Значит $b = 0$. Тогда $5^a = 7^c$, откуда $a = c = 0$.

7. Так как степень каждой вершины равна 10, то вершины этого графа можно покрасить в 11 цветов правильным образом. Тогда направим стрелочки так, чтобы стрелочка шла в направлении от цвета с большим номером к меньшему. Очевидно, что тогда все хорошо и прекрасно!

8. Обозначим последовательности $a_1, a_2, \ldots a_N$. Рассмотрим последовательность a_1. Какая-то цифра встречается в ней бесконечно много раз (если таких несколько - выберем любую). Назовем хорошими местами те места последовательности, стоит эта цифра. Теперь пусть мы уже рассмотрели первых i последовательностей и у нас выбраны какие-то хорошие места, так что этих мест бесконечно много и у каждой из последовательностей $a_1, \ldots a_i$ цифры на этих местах одинаковы. Рассмотрим теперь последовательность a_{i+1} и заметим, что, так как хороших мест бесконечно много, то у a_{i+1} на этих местах какая-то цифра встречается бесконечное число раз. Тогда теперь назовем хорошими местами те из старых хороших мест, на которых у a_{i+1} стоит эта цифра. Проделывая так для каждого i, мы получим хорошие места, которых бесконечно много, такие что у каждой из последовательностей $a_1, a_2, \ldots a_N$ на них стоят одинаковые цифры. Тогда каждую последовательность покрасим в цвет с номером той цифры, которая стоит у нее хороших местах. Очевидно, что при такой покраске любые две одноцветных последовательности похожи.

9. Выигрывает второй. Для начала заметим, что удастся получать только четные числа, а значит числа, полученные как произведение двух других должны быть кратны 4. В частности число 2006 можно получить лишь как сумму двух ранее полученных чисел. Разобьем все четные числа от 4 до 2002 на пары отличающихся на 2 (четных чисел от 4 до 2002 ровно 1000 штук, поэтому это возможно). В каждой паре будут числа $4k, 4k+2$. Заметим также, что числа сумма которых равна 2006 оказались в разных парах, причем если a в паре с b и c в паре с d,а также $a + c = 2006$, то $b + d = 2006$. Также очевидно, что проигравшим будет тот, кто первый поставит такое число n на доску, что число $2006 - n$ уже там стоит. Второй будет действовать по следующий стратегии, если первый выписал какое-то число на доску, то второй будет выписывать то, которое с ним в паре. Тогда перед каждым ходом первого на доске будет выписано число 2 и остальные числа по парам, поэтому если следующий ход первого не проигрышный, то и указанный ход второго тоже. Докажем, что второй сумеет так выписывать числа. Пусть первый выписал число из пары $4m, 4m+2$. Если он выписал $4m$, то второй просто прибавит к нему 2 и выпишет $4m+2$. Если же он выписал $4m+2$, то он мог сделать это только выписывая сумму двух чисел, причем не 2 и $4m$ так как $4m$ еще не выписано. При этом одно из этих чисел очевидно вида $4p+2$ (по модулю 4). Тогда число $4p$ тоже есть на доске, и сложив его со вторым числом мы можем выписать $4m$. Значит именно первый сделает проигрышный ход.

10. Вычтем из первого равенства второе, и получим: $y + x^2 - x - y^2 = x^3 - y^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = y^3 - y^2 + y$. Рассмотрим $f(t) = t^3 - t^2 + t$. Заметим, что производная $f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 > 0 \, \forall t \in \mathbb{R}$. Поэтому $f(t)$ - строго возрастает. Значит, если $f(x) = f(y)$, то $x = y$. Тогда, осталось решить уравнение: $x + x^2 = x^3$. Либо $x = 0$, либо $1 + x = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.